BAB II

KAJIAN TEORI

A. Ruang Vektor

Sub-bab ini menjelaskan definisi-definisi dasar mengenai ruang vektor, subruang dan kombinasi linear. Beberapa teorema yang dipelajari dalam ruang vektor dan kombinasi linear juga dijelaskan dan diberi contoh.

Definisi 2.1.1 (Wono Setya Budi, 1995)

Misalkan V himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar dengan bilangan real. Artinya, diberikan dua elemen $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ di V dan bilangan real s, kemudian jumlah $\bar{u}+\bar{v}$ dan perkalian skalar $s\bar{u}$ didefinisikan dan terletak di V juga. Kemudian V dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar tersebut disebut ruang vektor jika kedua operasi tersebut memenuhi sifat

Untuk setiap $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ dan $r, s \in \mathbb{R}$

(i) $\bar{u}+\bar{v}=\bar{v}+\bar{u}$

(ii) $\bar{u}+(\bar{v}+\bar{w})=(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w}$

(iii) *Ada elemen O di V sehingga $\bar{u}+O=\bar{u}$*

(iv) *Ada elemen $\bar{u}' \in V$ sehingga $\bar{u}+\bar{u}'=O$*

(v) $r(\bar{u}+\bar{v})=r\bar{u}+r\bar{v}$

(vi) $(r+s)\bar{u}=r\bar{u}+s\bar{u}$

(vii) $r(s\bar{u})=(rs)\bar{u}$

(viii) $1(\bar{u})=\bar{u}$

Selanjutnya contoh ruang vektor berikut ini diberikan agar definisi ruang vektor dapat lebih dipahami

Contoh 2.1.2

Misal diberikan $V = R^2$, dan didefinisikan sebagai

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix}$$

Akan dibuktikan bahwa V merupakan ruang vektor.

Bukti :

Ambil sebarang $u, v, w \in R^2$ dan $k, l \in \mathbb{R}$, dengan

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

(i) $u + v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in R^2$

(ii) $u + v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ (definisi penjumlahan)

$= \begin{pmatrix} x_2 + x_1 \\ y_2 + y_1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ (definisi penjumlahan)

$= v + u$

(iii) $(u + v) + w = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$ (definisi penjumlahan)

$$= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + x_3 \\ (y_1 + y_2) + y_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(definisi penjumlahan)}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + (x_2 + x_3) \\ y_1 + (y_2 + y_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ y_2 + y_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(definisi penjumlahan)}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{(definisi penjumlahan)}$$

$$= u + (v + w)$$

(iv) Anggap bahwa $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ merupakan identitas di V, maka

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Jadi $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ merupakan identitas di V.

(v) Ambil sebarang $u \in R^2$ dan anggap bahwa $-u \in R^2$, maka

$$u + (-u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + (-x_1) \\ y_1 + (-y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(-u) + u = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-x_1) + x_1 \\ (-y_1) + y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jadi $-u \in R^2$ invers dari sebarang $u \in R^2$.

(vi) Perhatikan $V: \mathbb{R} \times R^2 \to R^2$

$$ku = k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix} \in R^2$$

(vii) $$k(u + v) = k \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= k \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \qquad \text{(definisi penjumlahan)}$$

$$= \begin{pmatrix} k(x_1 + x_2) \\ k(y_1 + y_2) \end{pmatrix} \qquad \text{(definisi perkalian skalar)}$$

$$= \begin{pmatrix} kx_1 + kx_2 \\ ky_1 + ky_2 \end{pmatrix}$$ (definisi perkalian skalar)

$$= \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kx_2 \\ ky_2 \end{pmatrix}$$ (definisi penjumlahan)

$$= k\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$ (definisi perkalian skalar)

$$= ku + kv$$

(viii) $(k + l)u = (k + l)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (k + l)x_1 \\ (k + l)y_1 \end{pmatrix}$$ (definisi perkalian skalar)

$$= \begin{pmatrix} kx_1 + lx_1 \\ ky_1 + ly_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} lx_1 \\ ly_1 \end{pmatrix}$$ (definisi penjumlahan)

$$= k\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$ (definisi perkalian skalar)

$$= ku + lu$$

(ix)$k(lu) = k\left(l\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)$

$$= \left(kl\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)$$ (definisi perkalian skalar)

$$= (kl)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$= (kl)u$$

(x) $1u = 1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1x_1 \\ 1y_1 \end{pmatrix}$$ (definisi perkalian skalar)

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$= u$

Teorema 2.1.3 (Berberian, 1961)

Untuk sebarang ruang vektor V berlaku :

(i) Persamaan $x + y = z$ mempunyai satu dan hanya satu penyelesaian x.

(ii) Jika $z + z = z$ maka $z = \theta$

(iii) $\alpha\theta = \theta$, untuk setiap skalar α

(iv) $0x = \theta$, untuk setiap vektor x

(v) Jika $\alpha x = \theta$, maka $\alpha = 0$ atau $x = \theta$

Bukti :

(i) Diberikan y dan z merupakan vektor, maka $x = z + (-y)$ merupakan penyelesaian dari $x + y = z$, sebab :

$$x + y = [z + (-y)] + y = z + [(-y) + y] = z + \theta = z$$

Kemudian jika x_1 dan x_2 merupakan penyelesaian dari $x + y = z$, maka :

$$x_1 + y = z = x_2 + y,$$

$$(x_1 + y) + (-y) = (x_2 + y) + (-y),$$

$$x_1 + \big(y + (-y)\big) = x_2 + \big(y + (-y)\big),$$

$$x_1 = x_2$$

Sehingga persamaan $x + y = z$ memliki tepat satu penyelesaian.

(ii) θ merupakan penyelesaian dari $z + z = z$, sebab $\theta + z = z$. Menurut (i) maka $z = \theta$ merupakan satu-satunya penyelesaian untuk persamaan $z + z = z$.

(iii) $\alpha\theta = \alpha(\theta + \theta)$

$= \alpha\theta + \alpha\theta$ (definisi perkalian skalar)

Menurut (ii) maka $\alpha\theta = \theta$.

(iv) $0x = (0 + 0)x$

$= 0x + 0x$(sifat distributif bilangan riil)

Menurut (ii) maka $0x = \theta$.

(v) Diberikan $\alpha x = \theta$

- Jika $\alpha = 0$ maka bukti selesai
- Jika $\alpha \neq 0$, maka terdapat $\frac{1}{\alpha}$ sedemikian sehingga $1 = \frac{1}{\alpha}.\alpha$, sehingga

$$\alpha x = \theta$$

$$\frac{1}{\alpha}.\alpha x = \frac{1}{\alpha}.\theta$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}.\alpha\right)x = \frac{1}{\alpha}.\theta$$

$$1x = \theta$$

$$x = \theta$$

Contoh 2.1.4

Diambil dari contoh 2.1.2 dengan diberikan $V = R^2$, dan didefinisikan sebagai

$$\binom{x_1}{y_1} + \binom{x_2}{y_2} = \binom{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$$

$$k\binom{x_1}{y_1} = \binom{kx_1}{ky_1}$$

maka V memenuhi sifat pada teorema 2.1.3.

Bukti :

(i) Ambil sebarang $u, v, w \in V$ dengan $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ dan $w = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, maka $u = w + (-v)$ merupakan penyelesaian dari $u + v = w$, sebab :

$$\begin{aligned} u + v &= [w + (-v)] + v \\ &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \left(-\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 + x_1 \\ -y_1 + y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= w \end{aligned}$$

Kemudian andaikan u_1 dan u_2 merupakan penyelesaian dari $u + v = w$ dengan $u_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dan $u_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, maka :

$$u_1 + v = w = u_2 + v$$

$$(u_1 + v) + (-v) = (u_2 + v) + (-v)$$

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + \left(-\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + \left(-\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \left(-\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \left(-\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix}$$

$$\binom{a}{b} + \binom{x_1 - x_1}{y_1 - y_1} = \binom{c}{d} + \binom{x_1 - x_1}{y_1 - y_1}$$

$$\binom{a}{b} = \binom{c}{d}$$

$$u_1 = u_2$$

(ii) Diberikan $\theta, u \in V$ dengan $\theta = \binom{0}{0}$ dan $u = \binom{x_1}{y_1}$, maka $\theta = \binom{0}{0}$ merupakan penyelesaian dari $u + u = u$, sebab $\theta + u = u$. Menurut (i) maka $u = \binom{x_1}{y_1} = \binom{0}{0} = \theta$ merupakan satu-satunya penyelesaian untuk persamaan $u + u = u$.

(iii) Ambil sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$, dan $\theta \in V$ dengan $\theta = \binom{0}{0}$, maka

$$\begin{aligned}
\alpha\theta &= \alpha(\theta + \theta) \\
&= \alpha\left(\binom{0}{0} + \binom{0}{0}\right) \\
&= \alpha\binom{0}{0} + \alpha\binom{0}{0} \\
&= \alpha\theta + \alpha\theta
\end{aligned}$$

Menurut (ii) maka $\alpha\theta = \theta$.

(iv) Diberikan $u \in V$ dengan $u = \binom{x_1}{y_1}$, maka

$$\begin{aligned}
0u &= (0 + 0)u \\
&= (0 + 0)\binom{x_1}{y_1} \\
&= 0\binom{x_1}{y_1} + 0\binom{x_1}{y_1} \\
&= 0u + 0u
\end{aligned}$$

Menurut (ii) maka $0u = \theta$.

(v) Diberikan $\alpha u = \theta$ dengan $u, \theta \in V$ yang didefinisikan sebagai

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dan $\alpha \in \mathbb{R}$, maka $\alpha = 0$ atau $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \theta$.

Definisi 2.1.5 berikut menjelaskan suatu subruang dari ruang vektor.

Definisi 2.1.5 (Wono Setya Budi, 1995)

Misalkan W subhimpunan tak kosong dari ruang vektor V. Himpunan W disebut subruang (vektor) dari V jika W dengan operasi yang sama dengan operasi di V juga membentuk ruang vektor.

Teorema 2.1.6 (Wono Setya Budi, 1995)

Subhimpunan tak kosong W merupakan subruang dari ruang vektor V jika dan hanya jika :

(i) Untuk $\bar{u}, \bar{v} \in W$, maka $\bar{u} + \bar{v} \in W$

(ii) Untuk $\bar{u} \in W$ dan s bilangan riil, maka $s\bar{u} \in W$

Contoh 2.1.7

Diberikan $S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 = x_3\}$, S merupakan subruang dari $\mathbb{R}^3$, sebab :

(i) Jika $x = (a, b, b) \in S$, maka

$\alpha x = \alpha(a, b, b) = (\alpha a, \alpha b, \alpha b) \in S$, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$

(ii) Jika $x = (a, b, b)$ dan $y = (c, d, d)$ masing-masing merupakan elemen dari

S, maka

$$x + y = (a, b, b) + (c, d, d) = (a + c, b + d, b + d) \in S$$

Berikut akan dijelaskan mengenai kombinasi linear, bebas linear, bergantung linear, basis,dan dimensi pada ruang vector beserta contoh supaya lebih mudah dipahami.

Definisi 2.1.8 (Berberian, 1961)

Untuk sebarang ruang vektor V, suatu vektor v dikatakan kombinasi linear dari vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dengan koefisien skalar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ didefinisikan dengan $v = \sum_1^n \alpha_k v_k$.

Contoh 2.1.9

Diketahui $a = (1,2)$, $b = (-2, -3)$, dan $c = (1,3)$. c merupakan kombinasi linear dari a dan b, sebab dapat ditentukan dengan persamaan

$$c = k_1 a + k_2 b$$

$$(1,3) = k_1(1,2) + k_2(-2, -3)$$

$$(1,3) = (1k_1, 2k_2) + (-2k_2, -3k_2)$$

Maka dapat dinyatakan $1 = k_1 - 2k_2$ dan $3 = 2k_2 - 3k_2$. Dengan bantuan sifat eliminasi distribusi dapat diperoleh penyelesaian $k_1 = 3$ dan $k_2 = 1$.

Sehingga c merupakan kombinasi linear dari a dan b, dan dinyatakan dengan

$$c = 3a + b$$

Definisi 2.1.10 (Steven J.Leon, 1998)

Diberikan sebarang ruang vektor V, vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ dikatakan bebas linear jika

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

yang mengakibatkan bahwa semua skalar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ harus sama dengan 0.

Contoh 2.1.11

Vektor-vektor $\binom{2}{2}$ dan $\binom{1}{3}$ merupakan bebas linear, karena jika

$$\alpha_1 \binom{2}{2} + \alpha_2 \binom{1}{3} = \binom{0}{0}$$

maka,

$$2\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$$

Dengan menggunakan aturan eliminasi substitusi maka diperoleh hasil

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$$

Definisi 2.1.12 (Steven J.Leon, 1998)

Diberikan sebarang ruang vektor V, vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ dikatakan bergantung linear jika terdapat skalar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ yang tidak semua nol sedemikian sehingga

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

Contoh 2.1.13

Perhatikan ruang vektor R^3 atas $\mathbb{R}$

Diberikan $E = \{(0,1,0), (0,0,1), (0,1,1)\}$ di R^3. Maka E bergantung linear, sebab terdapat skalar yang tidak sama dengan nol sedemikian sehingga

$$1(0,1,0) + 1(0,0,1) + (-1)(0,1,1) = (0,0,0)$$

Definisi 2.1.14 (Shafarevich & Remizov, 2013)

Vektor $x_1, x_2, \dots, x_n$ *dari suatu ruang vektor V dikatakan basis jika vektor-vektor tersebut merupakan bebas linear dan vektor-vektor* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear atau* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *merentang V.*

Contoh 2.1.15

Diberikan $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (0,0,1)$, maka vektor tersebut merupakan basis untuk R^3. Sebab vektor-vektor $\{v_1, v_2, v_3\}$ adalah himpunan yang bebas linear dan setiap vektor $\{v_1, v_2, v_3\}$ pada R^3 dapat ditulis sebagai $v = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$, maka $\{v_1, v_2, v_3\}$ merentang R^3. Sehingga $\{v_1, v_2, v_3\}$ merupakan basis.

Definisi 2.1.16 (Steven Roman,)

Suatu ruang vektor V *berdimensi hingga jika* V *merupakan ruang vektor* $\{0\}$ *atau mempunyai basis yang berhingga, dan untuk yang lain dikatakan berdimensi tidak berhingga.*

Selanjutnya diberikan dua contoh yang masing-masing ruang vektor berdimensi hingga dan berdimensi tidak berhingga.

Contoh 2.1.17

Diberikan $a = (1,0,0), b = (1,1,0), c = (1,1,1)$. Vektor-vektor tersebut bebas linear sebab

$$k_1 a + k_2 b + k_3 c = 0$$

$$k_1(1,0,0) + k_2(1,1,0) + k_3(1,1,1) = 0$$

diperoleh nilai skalar $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, sehingga vektor $\{a, b, c\}$ bebas linear dan dimensinya adalah 3.

Contoh 2.1.18

Diberikan $\{v_1, v_2, v_3, \dots \dots\}$ dengan $v_1 = (1,0,0, \dots), v_2 = (0,1,0, \dots), v_3 = (0,0,1,0, \dots)$, dan seterusnya. Vektor $\{v_1, v_2, v_3, \dots \dots\}$ bebas linear, akan tetapi karena elemen di vektor-vektor $\{v_1, v_2, v_3, \dots \dots\}$ ada banyak tidak berhingga, maka dimensinya juga tidak berhingga.

B. Ruang Ber*norm*

Berikut akan dijelaskan mengenai dasar ruang ber*norm* dan sifat topologinya.

Definisi 2.2.1 (Audrey Terras, 2009)

Suatu ruang vektor $\boldsymbol{V}$ dikatakan ruang bernorm jika terdapat pemetaan fungsi norm $\boldsymbol{V}$ ke bilangan riil taknegatif, ditulis $\|\boldsymbol{v}\|$ untuk setiap $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$, dan memenuhi aksioma berikut

(i) $\|\boldsymbol{v}\| \geq \boldsymbol{0}$, *untuk setiap* $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$

(ii) $\|\boldsymbol{v}\| = \boldsymbol{0}$ *jika dan hanya jika* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

(iii) $\|\boldsymbol{\alpha v}\| = |\boldsymbol{\alpha}|\|\boldsymbol{v}\|$, *untuk setiap* $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ *dan* $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{R}$

(iv) $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$, *untuk setiap* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$

Disini $\boldsymbol{V}$ merupakan ruang vektor dan $\|\cdot\|$ merupakan *norm* pada $\boldsymbol{V}$

Contoh 2.2.2

Misalkan $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} = \{\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}) | \boldsymbol{x_i} \in \mathbb{R}\}$ dan didefinisikan fungsi

$$\|\cdot\| : \boldsymbol{V} \to \mathbb{R}$$

dengan $\|\boldsymbol{x}\| = (\sum_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{x_i}|^{\boldsymbol{2}})^{\frac{1}{2}}$. Akan dibuktikan bahwa $\|\cdot\|$ memenuhi sifat pada *norm*.

Bukti :

(i) Jelas bahwa penjumlahan suatu bilangan kuadrat akan lebih atau sama dengan 0. Sehingga $\|\boldsymbol{x}\| = (\sum_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{x_i}|^{\boldsymbol{2}})^{\frac{1}{2}} \geq \boldsymbol{0}$.

(ii) (→) Andaikan $\|\boldsymbol{x}\| = (\sum_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{x_i}|^{\boldsymbol{2}})^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{0}$, menurut *(i)* maka $\boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{0}$, untuk $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{n}$.

(←) Andaikan $\boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{0}$ untuk setiap $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{n}$, maka

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{x_i}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{0}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{0}.$$

(iii) Untuk sebarang skalar $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$, maka

$$\|\boldsymbol{cx}\| = (\sum_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{cx_i}|^{\boldsymbol{2}})^{\frac{1}{2}} = |\boldsymbol{c}|(\sum_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{x_i}|^{\boldsymbol{2}})^{\frac{1}{2}} \text{ (definisi perkalian skalar)}$$

$$= |\boldsymbol{c}|\|\boldsymbol{x}\|.$$

(iv) Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, yang didefinisikan sebagai

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{x_i}|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\boldsymbol{y}\| = \left(\sum_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{y_i}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Maka

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| = \left(\sum_{1}^{n}|\boldsymbol{x_i}+\boldsymbol{y_i}|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{1}^{n}|\boldsymbol{x_i}|^{2}+|\boldsymbol{y_i}|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{1}^{n}|\boldsymbol{x_i}|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{1}^{n}|\boldsymbol{y_i}|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|.$$

Terbukti bahwa fungsi $\|\cdot\|$ suatu norm.

Lemma 2.2.4 (akibat ketaksamaan segitiga) (O. Christensen, 2010 : 30)

Diberikan ruang vektor norm $\boldsymbol{V}$, maka

$$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\| \geq \|\boldsymbol{v}\|-\|\boldsymbol{w}\|, \qquad \forall \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in \boldsymbol{V}$$

Bukti :

Menggunakan Definisi 2.2.1 bagian (iv) diperoleh

$\|\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|+\|\boldsymbol{w}\|$………… (1)

$\|\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}\|-\|\boldsymbol{w}\|+\|\boldsymbol{w}\|$………………………… (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$\|\boldsymbol{v}\|-\|\boldsymbol{w}\|+\|\boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|+\|\boldsymbol{w}\|$$

$$\|\boldsymbol{v}\|-\|\boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|$$

Contoh 2.2.5

Dari contoh 2.2.3 yang diketahui bahwa $(\boldsymbol{R^n}, \|\cdot\|)$ suatu ruang ber*norm* dengan norm $\|\boldsymbol{x}\| = (\sum_{1}^{n}\boldsymbol{x_i}^{2})$ untuk $\{\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\dots,\boldsymbol{x_n}\}\in\mathbb{R}$, maka untuk sebarang $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R^n}$, yang didefinisikan sebagai

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{1}^{n} \boldsymbol{x_i}^2\right), \qquad \|\boldsymbol{y}\| = \left(\sum_{1}^{n} \boldsymbol{y_i}^2\right)$$

Jika

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\| &= \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}\| \\
&= \left(\sum_{1}^{n} (\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{y_i} + \boldsymbol{y_i})^2\right) \\
&\leq \left(\sum_{1}^{n} (\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{y_i})^2 + \boldsymbol{y_i}^2\right) \\
&= \left(\sum_{1}^{n} (\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{y_i})^2\right) + \left(\sum_{1}^{n} \boldsymbol{y_i}^2\right) \ldots (\mathbf{1})
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\| &= \|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\| \\
&= \left(\sum_{1}^{n} \boldsymbol{x_i}^2\right) - \left(\sum_{1}^{n} \boldsymbol{y_i}^2\right) + \left(\sum_{1}^{n} \boldsymbol{y_i}^2\right) \ldots (\mathbf{2})
\end{aligned}$$

Maka dari $(\mathbf{1})$ dan (2) diperoleh

$$\left(\sum_{1}^{n} \boldsymbol{x_i}^2\right) - \left(\sum_{1}^{n} \boldsymbol{y_i}^2\right) + \left(\sum_{1}^{n} \boldsymbol{y_i}^2\right) \leq \left(\sum_{1}^{n} (\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{y_i})^2\right) + \left(\sum_{1}^{n} \boldsymbol{y_i}^2\right)$$

$$\left(\sum_{1}^{n} \boldsymbol{x_i}^2\right) - \left(\sum_{1}^{n} \boldsymbol{y_i}^2\right) \leq \left(\sum_{1}^{n} (\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{y_i})^2\right)$$

$$\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

Definisi 2.2.6 (O. Christensen, 2010 : 32)

Barisan $\{\boldsymbol{v_k}\}_{\boldsymbol{k=1}}^{\infty}$ *di ruang bernorm* $\boldsymbol{V}$ *konvergen menuju* $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ *jika* untuk setiap $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$ terdapat bilangan asli $\boldsymbol{N}$ sedemikian sehingga untuk semua bilangan asli $\boldsymbol{k} \geq$

$\boldsymbol{N}$ berlaku

$$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v_k}\| \leq \boldsymbol{\varepsilon}$$

Artinya

$$\|\boldsymbol{v_k}-\boldsymbol{v}\| \rightarrow \mathbf{0}, \boldsymbol{untuk}\ \ \boldsymbol{k} \rightarrow \infty$$

atau bisa ditulis

$$\boldsymbol{v_k} \rightarrow \boldsymbol{v}, \boldsymbol{untuk}\ \ \boldsymbol{k} \rightarrow \infty$$

atau

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\boldsymbol{k}\to\infty} \boldsymbol{v_k}$$

Contoh 2.2.7

Diberikan barisan $(\boldsymbol{S_n})$ di ruang bernorm dan didefinisikan sebagai berikut

$$\boldsymbol{S_n} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^2}, \boldsymbol{n} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots$$

Maka barisan $(\boldsymbol{S_n})$ akan konvergen menuju 1.

Bukti :

Ambil sebarang $\boldsymbol{\epsilon} > \mathbf{0}$, misal $\boldsymbol{\delta} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\epsilon}} >$, maka terdapat bilangan asli $\boldsymbol{N} > \boldsymbol{\delta}$. Untuk semua bilangan asli $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{N}$, maka $\boldsymbol{n} > \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\epsilon}}$ sehingga $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$. Jadi untuk semua $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{N}$ berlaku

$$\left|\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^2}\right) - \mathbf{1}\right| = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^2} \leq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} < \boldsymbol{\epsilon}$$

Jadi terbukti bahwa barisan $(\boldsymbol{S_n})$ konvergen

Definisi 2.2.8 (O. Christensen, 2010 : 33)

Diberikan $\boldsymbol{V}$ suatu ruang bernorm.

(i) *Diberikan titik $\boldsymbol{v_0} \in \boldsymbol{V}$, maka bola buka yang berpusat di $\boldsymbol{v_0}$ dan dengan radius $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{0}$ yaitu*

$$\boldsymbol{B(v_0, r)} = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \mid \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v_0}\| < \boldsymbol{r}\}$$

(ii) *Untuk $\boldsymbol{v_0} \in \boldsymbol{V}$, maka persekitaran dari $\boldsymbol{v_0}$ merupakan subhimpunan dari $\boldsymbol{V}$ yang mengandung suatu bola $\boldsymbol{B(v_0, \delta)}$ untuk beberapa $\boldsymbol{\delta} > \boldsymbol{0}$.*

Definisi 2.2.9 (O. Christensen, 2010 : 33)

Diberikan $\boldsymbol{V}$ suatu ruang bernorm, dan $\boldsymbol{W}$ subhimpunan dari $\boldsymbol{V}$.

(i) *$\boldsymbol{W}$ terbuka jika untuk setiap $\boldsymbol{v_0} \in \boldsymbol{V}$ terdapat suatu $\boldsymbol{\delta} > \boldsymbol{0}$ sedemikian sehingga*

$$\boldsymbol{B(v_0, \delta)} \subseteq \boldsymbol{W}.$$

(ii) *Komplemen dari W yaitu*

$$\boldsymbol{W^c} = \boldsymbol{V} \setminus \boldsymbol{W}.$$

(iii) *$\boldsymbol{W}$ tertutup jika komplemen dari $\boldsymbol{W}$ terbuka.*

Teorema 2.2.10 (Sumanang Muhtar Gozali, 2010)

Misalkan $\boldsymbol{X}$ suatu ruang bernorm dan $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{V}$. Maka pernyataan berikut ekuivalen :

(i) *$\boldsymbol{A}$ tertutup*

(ii) *Jika $(\boldsymbol{x_n})$ suatu barisan di $\boldsymbol{A}$ dan $(\boldsymbol{x_n}) \to \boldsymbol{x}$, maka $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$.*

Bukti :

($\rightarrow$) Misal $\boldsymbol{A}$ tertutup maka $\boldsymbol{A^c}$ terbuka. Kemudian diberikan $(\mathbf{x_n})$ suatu barisan konvergen yang berada di $\mathbf{A}$ dan $(\boldsymbol{x_n}) \to \boldsymbol{x}$. Andai $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A^c}$, maka terdapat $\boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}$ sedemikian sehingga

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\delta}) \subseteq \boldsymbol{A^c}$$

Karena $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\delta})$ memuat semua $(\mathbf{x_n})$, maka berakibat $\boldsymbol{x_n} \in \boldsymbol{A^c}$, ini kontradiksi dengan asumsi bahwa $(\mathbf{x_n})$ suatu barisan di $\boldsymbol{A}$. Jadi $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$.

$(\leftarrow)$ Andaikan $\boldsymbol{A}$ tidak tertutup, maka $\boldsymbol{A^c}$ tidak terbuka. Artinya terdapat elemen $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{A^c}$ sehingga

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\delta}) \nsubseteq \boldsymbol{A^c}, \forall\, \boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}$$

Dengan mengambil $\boldsymbol{\delta} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}},\ \boldsymbol{n} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots$ maka diperoleh barisan $(\boldsymbol{u_n})$ sedemikian sehingga

$$\boldsymbol{u_n} \in \boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{x}, \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right) \quad \textbf{dan} \quad \boldsymbol{u_n} \in \boldsymbol{A}, \forall \boldsymbol{n}$$

Oleh karena itu diperoleh

$$\|\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{u}\| \leq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} \to \mathbf{0}$$

Berdasarkan (ii) maka $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{A^c}$ suatu kontradiksi.

C. Ruang Metrik

Definisi 2.3.1 (Kreyzig, 1989)

Diberikan $\boldsymbol{X}$ suatu himpunan tak kosong, suatu metrik di $\boldsymbol{X}$ adalah suatu fungsi $\boldsymbol{d}: \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X} \to [\mathbf{0}, \infty)$, sehingga untuk setiap pasangan $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X}$ berlaku :

(i) $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq \mathbf{0}$, *untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}$

(ii) $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$ *jika dan hanya jika* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

(iii) $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, *untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}$

(iv) $\boldsymbol{d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)}$, *untuk setiap* $\boldsymbol{x, y, z \in X}$

Selanjutnya pasangan $(\boldsymbol{X, d})$*merupakan ruang metrik, dimana* $\boldsymbol{X}$ *merupakan himpunan dan* $\boldsymbol{d}$ *merupakan metrik pada* $\boldsymbol{X}$.

Selanjutnya akan diberi contoh dari ruang metrik supaya pemahaman definisi ruang metrik lebih mudah.

Contoh 2.3.2

Himpunan bilangan $\mathbb{R}$ dengan fungsi $\boldsymbol{d_r}$ yang didefinisikan dengan $\boldsymbol{d_r(x,y) = |x-y|}$ untuk setiap $\boldsymbol{x, y} \in \mathbb{R}$ merupakan suatu ruang metrik, karena :

(i) $\boldsymbol{d_r(x,y) = |x-y| \geq 0}$;

(ii) $\boldsymbol{d_r(x,y) = |x-y| = 0}$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x = y}$;

(iii)$\boldsymbol{d_r(x,y) = |x-y| = |y-x| = d_r(y,x)}$;

(iv)$\boldsymbol{d_r(x,y) = |x-y| = |(x-z) + (z-y)| \leq d_r(x,z) + d_r(z,y)}$.

Sehingga terbukti bahwa $(\mathbb{R}, \boldsymbol{d_r})$ merupakan ruang metrik.

Definisi 2.3.3 (Parzynski, 1987)

Diberikan $(\boldsymbol{X, d})$ *suatu ruang metrik dan* $\boldsymbol{A}$ *himpunan bagian yang tidak kosong dari* $\boldsymbol{X}$. $\boldsymbol{A}$ *disebut terbatas jika terdapat bilangan real positif* $\boldsymbol{M}$ *sehingga* $\boldsymbol{d(x,y) \leq M}$, *untuk setiap* $\boldsymbol{x, y \in A}$.

Contoh 2.3.4

Misalkan ruang metrik $(\mathbb{R}, \boldsymbol{d})$ dengan $\boldsymbol{d(x,y) = |x-y|}$ untuk setiap $\boldsymbol{x, y} \in \mathbb{R}$. Maka $\boldsymbol{A = [0, 2]} \subset \mathbb{R}$ merupakan himpunan terbatas karena terdapat bilangan real positif $\boldsymbol{M = 3}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{d(x, y) = |x - y| \leq M}$, untuk setiap $\boldsymbol{x, y} \in$ $[\boldsymbol{0, 2}]$.

Berikut diberikan akibat/lemma dari definisi 2.2.2 yang memberikan pernyataan bahwa ruang metrik diinduksi dari ruang bernorm.

Lemma 2.3.5 (Sumanang Muhtar Gozali, 2010)

Suatu ruang metrik $(\mathbb{R}, \boldsymbol{d})$ yang diinduksi dari ruang bernorm memenuhi

(i) $\boldsymbol{d(x + a, y + a) = d(x, y)}$

(ii) $\boldsymbol{d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)}$.

Bukti :

Untuk setiap $\boldsymbol{x, y, a} \in \boldsymbol{X}$ dan skalar $\boldsymbol{\alpha}$

(i) $$\begin{aligned} \boldsymbol{d(x + a, y + a)} &= \boldsymbol{\|(x + a) - (y + a)\|} \\ &= \boldsymbol{\|x - y + a - a\|} \\ &= \boldsymbol{\|x - y\|} \\ &= \boldsymbol{d(x, y)} \end{aligned}$$

(ii) $$\begin{aligned} \boldsymbol{d(\alpha x, \alpha y)} &= \boldsymbol{\|\alpha x - \alpha y\|} \\ &= \boldsymbol{\|\alpha(x - y)\|} && \text{(definisi perkalian skalar)} \\ &= \boldsymbol{|\alpha|\|x - y\|} && \text{(definisi perkalian skalar)} \\ &= \boldsymbol{|\alpha| d(x, y)}. \end{aligned}$$

Contoh 2.3.6

Diambil dari contoh 2.3.2 yang diketahui bahwa $(\mathbb{R}, \boldsymbol{d})$ dengan $\boldsymbol{d(x, y) = |x - y|}$ untuk setiap $\boldsymbol{x, y} \in \mathbb{R}$, merupakan ruang metrik. Maka $(\mathbb{R}, \boldsymbol{d})$ memenuhi syarat

Lemma 2.3.5.

Bukti :

Untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ dan $\boldsymbol{\alpha}$ suatu skalar, maka

(i) $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{a}) = |(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{a})|$

$= |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$

$= \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

(ii) $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\alpha x}, \boldsymbol{\alpha y}) = |\boldsymbol{\alpha x} - \boldsymbol{\alpha y}|$

$= |\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|$

$= |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$

$= |\boldsymbol{\alpha}|\ \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

Berikut konsep dasar mengenai topologi seperti bola terbuka, bola tertutup, himpunan terbuka, himpunan tertutup.

Definisi 2.3.7 (Davis, 2005)

Misalkan $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{d})$ suatu ruang metrik dan $\boldsymbol{r}$ suatu bilangan real dengan $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{0}$. Bola terbuka pada $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{d})$ dengan jari-jari $\boldsymbol{r}$ dan pusat $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ didefinisikan sebagai

$$\boldsymbol{B_d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}) = \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X} : \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \boldsymbol{r}\}.$$

Contoh 2.3.8

Diambil dari contoh 2.3.2 yang diketahui bahwa $(\mathbb{R}, \boldsymbol{d})$ dengan $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$ merupakan ruang metrik. Bola buka pada $(\mathbb{R}, \boldsymbol{d})$ dengan jari-jari 0.5 dan pusat $\boldsymbol{1} \in \mathbb{R}$ didefinisikan dengan

$$\boldsymbol{B_d}\left(\boldsymbol{1}, \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\right) = \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X} : |\boldsymbol{1}-\boldsymbol{y}| < \boldsymbol{0.5}\}$$

$$= \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X} :\ -\mathbf{0.5} < \mathbf{1} - \boldsymbol{y} < \mathbf{0.5}\}$$

$$= \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X} :\ -\mathbf{1.5} < -\boldsymbol{y} < -\mathbf{0.5}\}$$

$$= \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X} : \mathbf{0.5} < \boldsymbol{y} < \mathbf{1.5}\}$$

Teorema berikut menjelaskan bahwa 2 bola buka yang memiliki pusat yang sama maka salah satunya merupakan himpunan bagian dari yang lain.

Teorema 2.3.9 (Aphane, 2009)

Misalkan $\boldsymbol{B_d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r_1})$ dan $\boldsymbol{B_d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r_2})$ suatu bola buka dengan pusat yang sama $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, dimana $\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2} > \mathbf{0}$. Maka

$$\boldsymbol{B_d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r_1}) \subseteq \boldsymbol{B_d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r_2})$$

Atau

$$\boldsymbol{B_d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r_2}) \subseteq \boldsymbol{B_d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r_1}).$$

Bukti :

(i) Andaikan $\boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{r_2}$, maka $\boldsymbol{B_d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r_1}) = \boldsymbol{B_d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r_2})$

Sehingga jelas bahwa $\boldsymbol{B_d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r_1}) \subseteq \boldsymbol{B_d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r_2})$ atau $\boldsymbol{B_d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r_2}) \subseteq \boldsymbol{B_d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r_1})$.

(ii) Andaikan $\boldsymbol{r_1} \neq \boldsymbol{r_2}$, maka terdapat 2 kemungkinan yaitu $\boldsymbol{r_1} > \boldsymbol{r_2}$ atau $\boldsymbol{r_1} < \boldsymbol{r_2}$.

Diasumsikan $\boldsymbol{r_1} > \boldsymbol{r_2}$. Misal terdapat $\boldsymbol{x_1} \in \boldsymbol{B_d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r_2})$, maka $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_1}) < \boldsymbol{r_2}$.

Karena $\boldsymbol{r_1} > \boldsymbol{r_2}$, maka $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_1}) < \boldsymbol{r_1}$.

Sehingga $\boldsymbol{x_1} \in \boldsymbol{B_d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r_1})$. Jadi $\boldsymbol{B_d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r_2}) \subseteq \boldsymbol{B_d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r_1})$.

Selanjutnya diasumsikan untuk $\boldsymbol{r_1 < r_2}$. Misal terdapat $\boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{B_d(x, r_1)}$, maka $\boldsymbol{d(x, x_2) < r_1}$.

Oleh karena $\boldsymbol{r_1 < r_2}$, maka $\boldsymbol{d(x, x_2) < r_2}$.

Sehingga $\boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{B_d(x, x_2)}$. Jadi $\boldsymbol{B_d(x, r_1)} \subseteq \boldsymbol{B_d(x, r_2)}$.

Jadi untuk sebarang $\boldsymbol{B_d(x, r_1)}$ dan $\boldsymbol{B_d(x, r_2)}$ suatu bola buka dengan pusat yang sama $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, dimana $\boldsymbol{r_1, r_2 > 0}$. Maka $\boldsymbol{B_d(x, r_1)} \subseteq \boldsymbol{B_d(x, r_2)}$ atau $\boldsymbol{B_d(x, r_2)} \subseteq \boldsymbol{B_d(x, r_1)}$.

Contoh 2.3.10

Diambil dari contoh 2.3.2 yang diketahui bahwa $(\mathbb{R}, \boldsymbol{d})$ dengan $\boldsymbol{d(x, y) = |x - y|}$ untuk setiap $\boldsymbol{x, y} \in \mathbb{R}$ merupakan ruang metrik. Andaikan $\boldsymbol{B_d(x, r_1)}$ dan $\boldsymbol{B_d(x, r_2)}$ suatu bola buka pada $(\mathbb{R}, \boldsymbol{d})$ dengan pusat yang sama yaitu $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ dan jari-jari $\boldsymbol{r_1, r_1 > 0}$. Maka

$$\boldsymbol{B_d(x, r_1)} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R} : \boldsymbol{d(x, y) < r_1}\} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R} : \boldsymbol{|x - y| < r_1}\},$$

$$\boldsymbol{B_d(x, r_2)} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R} : \boldsymbol{d(x, y) < r_2}\} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R} : \boldsymbol{|x - y| < r_2}\}$$

Andaikan $\boldsymbol{r_1 = r_2}$, maka $\boldsymbol{B_d(x, r_1)} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R} : \boldsymbol{d(x, y) < r_1 = r_2}\} = \boldsymbol{B_d(x, r_2)}$.

Andaikan $\boldsymbol{r_1 > r_2}$, maka $\boldsymbol{B_d(x, r_2)} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R} : \boldsymbol{d(x, y) < r_2 < r_1}\} \subset \boldsymbol{B_d(x, r_1)}$.

Andaikan $\boldsymbol{r_2 > r_1}$, maka $\boldsymbol{B_d(x, r_1)} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R} : \boldsymbol{d(x, y) < r_1 < r_2}\} \subset \boldsymbol{B_d(x, r_2)}$.

Jika definisi 2.3.5 menjelaskan mengenai pengertian bola buka, maka definisi 2.3.11 dibawah ini akan menjelaskan mengenai pengertian bola tutup dalam suatu ruang metrik dan selanjutnya akan diberikan contohnya.

Definisi 2.3.11 (Davis, 2005)

Misalkan $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{d})$ suatu ruang metrik dan $\boldsymbol{r}$ suatu bilangan real dengan $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{0}$. Bola tertutup pada $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{d})$ dengan jari-jari $\boldsymbol{r}$ dan pusat $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ didefinisikan sebagai

$$\boldsymbol{B_d}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}] = \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X} : \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \boldsymbol{r}\}.$$

Contoh 2.3.12

Diambil dari contoh 2.3.2 yang diketahui bahwa $(\mathbb{R}, \boldsymbol{d})$ dengan $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$ merupakan ruang metrik. Bola buka pada $(\mathbb{R}, \boldsymbol{d})$ dengan jari-jari 1 dan pusat $\boldsymbol{0} \in \mathbb{R}$ didefinisikan dengan

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B_d}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}) &= \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X} : |\boldsymbol{y}| \leq \boldsymbol{1}\} \\ &= \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X} : -\boldsymbol{1} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{1}\} \end{aligned}$$

Selanjutnya akan dijelaskan mengenai barisan konvergen, barisan *Cauchy* dan kelengkapan pada ruang metrik.

Definisi 2.3.13 (Parzynski, 1987)

Suatu barisan $\{\boldsymbol{x_n}\}$ *dalam suatu ruang metrik* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{d})$ *disebut barisan Cauchy jika untuk setiap* $\boldsymbol{\varepsilon} > \boldsymbol{0}$, *terdapat* $\boldsymbol{n_0} \in \mathbb{N}$ *sedemikian sehingga*

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{x_m}) < \boldsymbol{\varepsilon}, \ \ \forall \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \geq \boldsymbol{n_0}$$

Contoh 2.3.14

Diberikan $(\mathbb{R}, \boldsymbol{d})$ suatu ruang metrik, dengan $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$. Maka barisan $\{\boldsymbol{x_n}\} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}$ untuk setiap $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ merupakan barisan *Cauchy*.

Sebab :

Untuk setiap $\boldsymbol{\varepsilon} > \boldsymbol{0}$, terdapat $\boldsymbol{n_0} \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{n_0} > \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Jika $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \geq \boldsymbol{n_0}$

maka

$$\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right| < \frac{1}{n}+\frac{1}{m} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon$$

Jadi $\{x_n\} = \frac{1}{n}$ merupakan barisan *Cauchy*.

Teorema 2.3.15

Barisan $\{x_n\}$ *yang konvergen dalam suatu ruang metrik* (X, d) *adalah barisan Cauchy.*

Bukti :

Misal $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in X$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga jika $n \geq n_0$ maka $d(x_n, x) < \varepsilon$, sehingga $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Andaikan $n, m \geq n_0$, maka $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga diperoleh

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Terbukti bahwa barisan konvergen dalam suatu ruang metrik merupakan barisan *Cauchy*.

Definisi 2.3.16

Suatu ruang metrik (X,d) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy dalam (X, d) *konvergen.*

Contoh 2.3.17

Diberikan $\mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Maka ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ merupakan ruang metrik lengkap.

Sebab :

Diberikan $\{\boldsymbol{x_n}\} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$ untuk $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ suatu barisan *Cauchy*, maka $\{\boldsymbol{x_n}\}$ akan konvergen menuju $\mathbf{0}$, sebab untuk setiap $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$, terdapat $\boldsymbol{n_0} \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{n_0} > \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ dan $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{n_0}$ maka

$$\left|\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} - \mathbf{0}\right| = \left|\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right| = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} \leq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n_0}} < \boldsymbol{\varepsilon}$$

Dan $\mathbf{0} \in \mathbb{R}$, sehingga $(\mathbb{R}, \boldsymbol{d})$ merupakan ruang metrik lengkap.

Contoh 2.3.18

Diberikan $\boldsymbol{Z} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \subset \mathbb{R}$ dengan $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Z}$. Maka ruang metrik $(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{d})$ merupakan ruang metrik tidak lengkap. Sebab $\{\boldsymbol{x_n}\} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$ merupakan barisan *Cauchy* yang konvergen ke 0, tetapi $\mathbf{0}$ bukan elemen di $\boldsymbol{Z}$. Sehingga $(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{d})$ ruang metrik tidak lengkap.